

株価がある一定の水準となった場合に行使する想定 を置く場合の評価式

茄子評価株式会社

2025 年 10 月 21 日

発行後即時に行使可能となる場合の評価式

満期 $t = T$ までの間に株価が H まで上昇すれば $H - K$ のキャピタルゲイン、そうでなければ 0 です。この $H - K$ のペイオフを、株価が初めて H に到達した時刻 $\tau = \min \{ 0 \leq t \mid S(t) = H \}$ から現時点まで割引計算したものが評価額 C_H となります。したがって、

$$\begin{aligned} C_H &= \mathbb{E}[(H - K)e^{-r\tau} \cdot 1_{\{0 \leq \tau \leq T\}} + 0 \cdot 1_{\{T < \tau\}}] \\ &= (H - K)\mathbb{E}[e^{-r\tau} \cdot 1_{\{0 \leq \tau \leq T\}}] \\ &\simeq (H - K)\mathbb{P}(0 \leq \tau \leq T) \exp(-r\mathbb{E}[\tau \mid 0 \leq \tau \leq T]) \end{aligned}$$

次に、満期までに株価が H 円を超えなかったとしても、満期時点でインザマネー ($S(T) > K$) であるなら行使すべき、と想定する場合を考えます。この場合は①株価が H まで上がった時に失効するアップ・アンド・アウト条件と、②株価が H まで上がった時に $(H - K)$ のキャピタル・ゲインが発生する条件、の合成と考えることができます。例えば、 $t = \frac{T}{2}$ 時点で初めて株価が H に達した場合、その時点で $(H - K)$ のキャピタル・ゲインが確定する一方、満期時に行使可能なオプションは消滅します。

$$C_H \simeq C_{uo} + (H - K)\mathbb{P}(0 \leq \tau \leq T) \exp \{-r\mathbb{E}[\tau \mid 0 \leq \tau \leq T]\}$$

C_{uo} はアップ・アンド・アウト・オプションの評価額です。 $C_{uo} + C_{ui} = C_{bs}$ (アウト・オプションとイン・オプション両方を持っていればプレーンと同等) なので、 $C_{uo} = C_{bs} - C_{ui}$ とすれば評価できます。

行使可能となるまでに待機期間がある場合の評価式

待機期間が終了して t_1 時点での株価 $S(t_1)$ が H 以上であれば、その時点で行使されます (その評価額が $C_{gap}^{S(0), t_1}$ です。)

t_1 時点での株価 $S(t_1)$ が H 未満の場合を考えます。 $S(t_1)$ は $0 < S(t_1) < H$ の任意の値をとりえるので、これを変数 s と書くことにします ($S(t_1) = s$)。 t_1 時点で s であった株価が、 $t_1 \leq t \leq T$ の間で H に初めて到達した時点 $t_1 + \tau^{s*1}$ でキャピタル・ゲイン $(H - K)$ が確定します。このキャピタル・ゲインを $t_1 + \tau^s$ から現時点まで割引計算する

*1 τ^s は株価 s から開始する場合の停止時刻 $\tau^s = \min \{ 0 \leq t \mid S(0) = s, S(t) = H \}$ で、これは s の関数です。

ことになります。つまり、 $S(t_1) = s$ ($0 < s < H$) の場合の価値 $V(s)$ は

$$\begin{aligned} V(s) &= \mathbb{E}[(H - K) \cdot e^{-r(t_1 + \tau^s)} \cdot 1_{\{0 \leq \tau^s \leq T - t_1\}} + 0 \cdot 1_{\{T - t_1 < \tau^s\}}] \\ &= (H - K) \mathbb{E}[e^{-r(t_1 + \tau^s)} \cdot 1_{\{0 \leq \tau^s \leq T - t_1\}}] \end{aligned}$$

となります。

株価 s は $0 < s < H$ のあらゆる値をとりえるため、 $V(s)$ を s の確率密度関数 $f_{S(t_1)}(s)$ を用いて期待値評価^{*2}します。

$$\int_0^H V(s) f_{S(t_1)}(s) ds$$

以上合わせて、評価額は

$$C_{gap}^{S(0), t_1} + \int_0^H V(s) f_{S(t_1)}(s) ds$$

となります。

次に、満期までに株価が H 円を超えなかったとしても、満期時点でインザマネー ($S(T) > K$) であるなら行使すべき、と想定する場合を考えます。この場合は、上述の評価額に、 $t_1 < t < T$ において株価が一度でも H にヒットすると失効するアップ・アンド・アウト・オプションの評価額を加算します。

$$C_{gap}^{S(0), t_1} + C_{uoB}^{S(0), t_1, T} + \int_0^H V(s) f_{S(t_1)}(s) ds$$

C_{uoB} はアップ・アンド・アウト（一部期間（後）で判定）の評価額です。期間を t_1 と T を明示しました。

^{*2} 株価が離散的な値をしかとらない場合を考えるとわかりやすいかもしれません。

$$\sum_{s=1}^{H-1} V(s) \mathbb{P}(S(t_1) = s)$$