

行使価額が確定していない場合の評価式

茄子評価株式会社

2025 年 10 月 21 日

0.0.1 行使価額が確定していない場合

発行決議日が現時点 $t = 0$ 、割当日が $t = t_1$ 、満期が $t = T$ として、 $t = 0$ で満期 $T - t_1$ として評価した SO の評価額を $C^{S(0), T-t_1}$ とします。また、配当額を q' 、配当権利落ち日を t'_1 ($0 < t'_1 < t_1$) とします。

株価 $S(t_1)$ がわかっているとすれば、株価を $S(t_1)$ として評価した評価額は、株価に比例するので、

$$\frac{S(t_1)}{S(0)} C^{S(0), T-t_1} \cdot e^{-rt_1}$$

となります。 $\frac{S(t_1)}{S(0)} C^{S(0), T-t_1}$ は $t = t_1$ 時点の価値で、 $t = 0$ まで割引計算しました。

実際には $t = 0$ で株価 $S(t_1)$ は分からないため、この期待値を考えることになります*1

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\frac{S(t_1)}{S(0)} C^{S(0), T-t_1} \cdot e^{-rt_1}\right] &= e^{-rt_1} C^{S(0), T-t_1} \frac{1}{S(0)} \mathbb{E}[S(t_1)] \\ &= e^{-rt_1} C^{S(0), T-t_1} \frac{1}{S(0)} \left(S(0)e^{rt_1} - q'e^{r(t_1-t'_1)}\right) \\ &= \frac{S(0) - q'e^{-rt'_1}}{S(0)} C^{S(0), T-t_1} \end{aligned}$$

通常は $q' = 0$ 、仮に $q' > 0$ であっても t'_1 はごく小さく割引の影響も無視できるので、

$$C_{fs} = \frac{S(0) - q'}{S(0)} C^{S(0), T-t_1}$$

としています。

次に、ダウン・アンド・アウト・オプション ($H \leq K$) の H と K が $S(0)$ に比例して決まる場合、その評価額 C_{do} も $S(0)$ に比例することを確認します。

$$\begin{aligned} C_{do} &= S(0)e^{-qT} N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2) \\ &\quad - S(0)e^{-qT} \left(\frac{H}{S(0)}\right)^{2\lambda} N(f_1) \\ &\quad - Ke^{-rT} \left(\frac{H}{S(0)}\right)^{2\lambda-2} N(f_2) \end{aligned}$$

*1 $\mathbb{E}[S(t_1)] = S(0)e^{rt_1} - q'e^{r(t_1-t'_1)}$ は面倒ですが、

$$\begin{aligned} S(t_1) &= (S(t'_1) - q')e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(t_1-t'_1)+\sigma W(t_1-t'_1)} \\ &= S(0)e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)t'_1+\sigma W(t'_1)} \cdot e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(t_1-t'_1)+\sigma W(t_1-t'_1)} - q' \cdot e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(t_1-t'_1)+\sigma W(t_1-t'_1)} \end{aligned}$$

の期待値を計算します。 $W(t'_1)$ と $W(t_1 - t'_1)$ が独立であることを使います。

$$\lambda = \frac{r - q + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma^2}$$

$$d_1 = \frac{\log \frac{S(0)}{K} + (r - q + \frac{1}{2}\sigma^2) T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

$$f_1 = \frac{\log \frac{H^2}{S(0)K}}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T}, \quad f_2 = f_1 - \sigma\sqrt{T}$$

これに $K = \alpha S(0)$ 、 $H = \alpha' S(0)$ を代入すると、

$$d_1 = \frac{\ln(1/\alpha) + (b + \sigma^2/2) T_2}{\sigma\sqrt{T_2}}, \quad f_1 = \frac{\log \frac{(\alpha')^2}{\alpha}}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T}$$

なので d_1 、 d_2 、 f_1 、 f_2 は $S(0)$ によらない定数となり、

$$\begin{aligned} C_{do} &= S(0)e^{-qT}N(d_1) - \alpha S(0)e^{-rT}N(d_2) \\ &\quad - S(0)e^{-qT} \left(\frac{\alpha' S(0)}{S(0)} \right)^{2\lambda} N(f_1) \\ &\quad - \alpha S(0)e^{-rT} \left(\frac{\alpha' S(0)}{S(0)} \right)^{2\lambda-2} N(f_2) \\ &= S(0) \{ e^{-qT}N(d_1) - \alpha e^{-rT}N(d_2) - e^{-qT}(\alpha')^{2\lambda}N(f_1) - \alpha e^{-rT}(\alpha')^{2\lambda-2}N(f_2) \} \\ &= S(0) \times (\text{定数}) \end{aligned}$$

と、評価額は $S(0)$ に比例します。

また、 C_{do} の評価式の 1 行目が C_{bs} であることから、 C_{bs} の評価額も $S(0)$ に比例することがわかります。