

強制行使条項評価式の導出

茄子評価株式会社

2025 年 10 月 17 日

0.1 強制行使条項評価式の導出

0.1.1 強制行使条項付き（即時行使）

①株価が H まで下がった時に失効するダウン・アンド・アウト条件と、②株価が H まで下がった時点で $(H - K)$ の損失が発生する条件、の合成と考えることができます。

①の部分は「ダウン・アンド・アウト（全期間にわたり判定）」で評価できます。

②の部分については、満期 $t = T$ までの間に株価が H まで下落すれば $H - K$ の損失、そうでなければ 0 です。この $H - K$ のペイオフを、株価が初めて H に到達した時刻 $\tau = \min \{ 0 \leq t \mid S(t) = H \}$ から現時点まで割引計算します。したがって、

$$\begin{aligned} \textcircled{2} &= \mathbb{E}[(H - K)e^{-r\tau} \cdot 1_{\{0 \leq \tau \leq T\}} + 0 \cdot 1_{\{T < \tau\}}] \\ &= (H - K)\mathbb{E}[e^{-r\tau} \cdot 1_{\{0 \leq \tau \leq T\}}] \\ &\simeq (H - K)\mathbb{P}(0 \leq \tau \leq T) \exp(-r\mathbb{E}[\tau \mid 0 \leq \tau \leq T]) \end{aligned}$$

0.1.2 強制行使条項付き（満期時に行使）

①株価が H まで下がった時に失効するダウン・アンド・アウト条件と、②株価が H まで下がった場合に満期時点で $(S(T) - K)$ のキャピタル・ゲインまたは損失が発生する条件、の合成と考えることができます。

$$\begin{aligned} &C_{do} + \mathbb{E}[e^{-rT}(S(T) - K) \cdot 1_{\{0 < \tau \leq T\}}] \\ &= C_{do} + \mathbb{E}[e^{-rT}\{(S(T) - K)^+ - (K - S(T))^+\} \cdot 1_{\{0 < \tau \leq T\}}] \\ &= C_{do} + \mathbb{E}[e^{-rT}(S(T) - K)^+ \cdot 1_{\{0 < \tau \leq T\}}] - \mathbb{E}[e^{-rT}(K - S(T))^+ \cdot 1_{\{0 < \tau \leq T\}}] \\ &= C_{do} + C_{di} - P_{di} \\ &= C_{bs} - P_{di} \end{aligned}$$

C_{di} はダウン・アンド・イン・コール・オプションの評価額、 P_{di} はダウン・アンド・イン・プット・オプションの評価額です。2つ目の等式は、先物契約 $(S(T) - K)$ はコールの買い $(S(T) - K)^+$ とプットの売り $-(K - S(T))^+$ の合成であることを言っています。最後の等式は、ダウン・アンド・アウト・コールとダウン・アンド・イン・コールの合成が（バリアのない通常の）コールであることを言っています。

0.1.3 強制行使条項付き（一定期間内に行使）

①株価が H まで下がった時に失効するダウン・アンド・アウト条件と、②株価が H まで下がった時に、その時刻 $\tau = \min \{ 0 \leq t \mid S(t) = H \}$ から時間 δ 後に $(S(\tau + \delta) - K)$ のキャピタル・ゲインまたは損失が発生する条件（ $\tau + \delta$ が満期 T を超えるケースを別途考慮します）の合成と考えることができます。

①の部分は「ダウン・アンド・アウト（全期間にわたり判定）」で評価できます。

②の部分は $0 \leq \tau \leq T - \delta$ の場合と、 $T - \delta < \tau < T$ の場合に分けて考えます。前者の場合は行使がなされるのは時刻 $\tau + \delta$ 、後者の場合は時刻 T です。

$$\begin{aligned} \textcircled{2} &= \mathbb{E}[e^{-r(\tau+\delta)} (S(\tau + \delta) - K) \cdot 1_{\{0 \leq \tau \leq T-\delta\}} \\ &\quad + e^{-rT} (S(T) - K) \cdot 1_{\{T-\delta < \tau \leq T\}} + 0 \cdot 1_{\{T < \tau\}}] \\ &= \mathbb{E}[e^{-r(\tau+\delta)} (S(\tau + \delta) - K) \cdot 1_{\{0 \leq \tau \leq T-\delta\}}] \\ &\quad + \mathbb{E}[e^{-rT} (S(T) - K) \cdot 1_{\{T-\delta < \tau \leq T\}}] \end{aligned}$$

最右辺の第1項を②-1、第2項を②-2 とします。

$$\begin{aligned} \textcircled{2} - 1 &= \mathbb{E}[e^{-r(\tau+\delta)} (S(\tau + \delta) - K) \cdot 1_{\{0 \leq \tau \leq T-\delta\}}] \\ &= \mathbb{E}[e^{-r(\tau+\delta)} \left(H e^{(r-q-\frac{1}{2}\sigma^2)\delta + \sigma W(\delta)} - K \right) \cdot 1_{\{0 \leq \tau \leq T-\delta\}}] \\ &= H e^{(r-q-\frac{1}{2}\sigma^2)\delta} e^{-r\delta} \mathbb{E}[e^{-r\tau} e^{\sigma W(\delta)} \cdot 1_{\{0 \leq \tau \leq T-\delta\}}] \\ &\quad - K e^{-r\delta} \mathbb{E}[e^{-r\tau} \cdot 1_{\{0 \leq \tau \leq T-\delta\}}] \\ &= H e^{(r-q-\frac{1}{2}\sigma^2)\delta} e^{-r\delta} \mathbb{E}[e^{-r\tau} \cdot 1_{\{0 \leq \tau \leq T-\delta\}}] \mathbb{E}[e^{\sigma W(\delta)}] \\ &\quad - K e^{-r\delta} \mathbb{E}[e^{-r\tau} \cdot 1_{\{0 \leq \tau \leq T-\delta\}}] \\ &= (H e^{-q\delta} - K e^{-r\delta}) \mathbb{E}[e^{-r\tau} \cdot 1_{\{0 \leq \tau \leq T-\delta\}}] \end{aligned}$$

2つ目の等式で $S(\tau + \delta) = H e^{\{(r-q-\frac{1}{2}\sigma^2)((\tau+\delta)-\tau) + \sigma W((\tau+\delta)-\tau)\}}$ 、4つ目の等式で τ と $W(\delta)$ が独立であること、最後の等式で $\mathbb{E}[e^{\sigma W(\delta)}] = e^{\frac{1}{2}\sigma^2\delta}$ を用いています。

$$\begin{aligned} \textcircled{2} - 2 &= \mathbb{E}[e^{-rT} (S(T) - K) \cdot 1_{\{T-\delta < \tau \leq T\}}] \\ &= \mathbb{E}[e^{-rT} \left(H e^{(r-q-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-\tau) + \sigma W(T-\tau)} - K \right) \cdot 1_{\{T-\delta < \tau \leq T\}}] \\ &= \mathbb{E}[e^{-rT} H e^{(r-q-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-\tau) + \sigma W(T-\tau)} \cdot 1_{\{T-\delta < \tau \leq T\}}] \\ &\quad - \mathbb{E}[e^{-rT} K \cdot 1_{\{T-\delta < \tau \leq T\}}] \end{aligned}$$

最右辺の第1項の $T - \tau$ は $0 \leq T - \tau \leq \delta$ の範囲で変動する確率変数です。 δ が小さい想定で、これをざっくり $T - \tau = \frac{1}{2}\delta$ と近似します。 δ がある程度大きい場合（半年以内、など）は $T - \mathbb{E}[\tau \mid T - \delta < \tau \leq T]$ と近似するとより精度が高くなります。

$$\begin{aligned}
 (\text{第1項}) &= \simeq \mathbb{E}[e^{-rT} H e^{(r-q-\frac{1}{2}\sigma^2)(\frac{1}{2}\delta) + \sigma W(\frac{1}{2}\delta)} \cdot 1_{\{T-\delta < \tau \leq T\}}] \\
 &= H e^{-rT} e^{(r-q-\frac{1}{2}\sigma^2)(\frac{1}{2}\delta)} \mathbb{E}[e^{\sigma W(\frac{1}{2}\delta)} \cdot 1_{\{T-\delta < \tau \leq T\}}] \\
 &= H e^{-rT} e^{(r-q-\frac{1}{2}\sigma^2)(\frac{1}{2}\delta)} \mathbb{E}[e^{\sigma W(\frac{1}{2}\delta)}] \mathbb{E}[1_{\{T-\delta < \tau \leq T\}}] \\
 &= H e^{-rT} e^{(r-q)(\frac{1}{2}\delta)} \mathbb{E}[1_{\{T-\delta < \tau \leq T\}}]
 \end{aligned}$$

従って、

$$\begin{aligned}
 \textcircled{2} - 2 &= H e^{-rT} e^{(r-q)(\frac{1}{2}\delta)} \mathbb{E}[1_{\{T-\delta < \tau \leq T\}}] - K e^{-rT} \mathbb{E}[1_{\{T-\delta < \tau \leq T\}}] \\
 &= e^{-rT} (H e^{(r-q)(\frac{1}{2}\delta)} - K) \mathbb{P}(T - \delta < \tau \leq T)
 \end{aligned}$$

②-2 と同じように考えると、強制行使条項付き（ヒット時と満期の中間時点で行使）とする近似的解析解も求めることができます。行使がなされる時点は $\frac{\tau+T}{2}$ なので、

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{E}[e^{-r\frac{\tau+T}{2}} \left(S\left(\frac{\tau+T}{2}\right) - K \right) \cdot 1_{\{0 \leq \tau \leq T\}}] \\
 &= \mathbb{E}[e^{-r\frac{\tau+T}{2}} \left(H e^{(r-q-\frac{1}{2}\sigma^2)(\frac{\tau+T}{2}-\tau) + \sigma W(\frac{\tau+T}{2}-\tau)} - K \right) \cdot 1_{\{0 \leq \tau \leq T\}}]
 \end{aligned}$$

$\frac{\tau+T}{2} - \tau$ はヒット時から行使時までの時間で、これを $\frac{T-\mathbb{E}[\tau \mid 0 \leq \tau \leq T]}{2}$ とざっくり置いてしまします。詳細な式変形は省きますが（②-2 と同様）、

$$e^{-r\frac{\mathbb{E}[\tau \mid 0 \leq \tau \leq T]+T}{2}} \cdot (H e^{(r-q)\frac{T-\mathbb{E}[\tau \mid 0 \leq \tau \leq T]}{2}} - K) \cdot \mathbb{P}(0 \leq \tau \leq T)$$

平均的な行使時は $\frac{\mathbb{E}[\tau \mid 0 \leq \tau \leq T]+T}{2}$ でこの時点から現在までの割引計算がなされており、株価は平均的なヒット時から行使までの期間^{*1} $\frac{T-\mathbb{E}[\tau \mid 0 \leq \tau \leq T]}{2}$ だけ $S(\tau) = H$ から年率 $r - q$ で成長（減価）、最後にヒットする確率を考慮、という形になります。

*1 $\frac{\mathbb{E}[\tau \mid 0 \leq \tau \leq T]+T}{2} - \mathbb{E}[\tau \mid 0 \leq \tau \leq T] = \frac{T-\mathbb{E}[\tau \mid 0 \leq \tau \leq T]}{2}$